

2017 年株洲市第二中学创新实验班综合测评 (数学)

学校 _____ 姓名 _____

时间: 120 分钟 满分: 130 分

一、选择题 (每题 5 分, 共 50 分)

1. 下列计算中正确的是 ()

- A. $-(-a)^4 \div a^2 = a^2$ B. $(2a-3b)(-2a-3b) = 4a^2 - 9b^2$
 C. $(xy)^{-1}(\frac{1}{2}xy)^2 = \frac{1}{4}xy^2$ D. $\sqrt{-a^3} = -a\sqrt{-a}$

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 三角形三条中线的交点是内心, 三条高的交点是垂心
 B. 三角形三条边的垂直平分线的交点是垂心, 三条中线的交点是重心
 C. 三角形三条角平分线的交点是内心, 三条中线的交点是重心
 D. 三角形三条边的垂直平分线的交点是外心, 三条角平分线的交点是重心

3. 若直线 $x = a$ 是函数 $y = \begin{cases} 1(x \text{ 为有理数}) \\ -1(x \text{ 为无理数}) \end{cases}$ 的对称轴, 则 a 一定是 ()

- A. 有理数 B. 无理数 C. 整数 D. 不存在

4. 关于 x 的不等式 $y = \begin{cases} -2x+4 \geq 0 \\ x > a \end{cases}$ 恰有 1、2 两个整数解。则函数 $y = ax^2 - 2x + 1$ 的图象与 x 轴的交点个数 ()

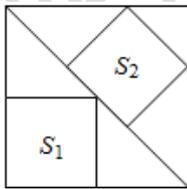
- A. 没有交点 B. 一个交点 C. 两个交点 D. 一个或两个交点

5. 设 a 、 b 是方程 $x^2 + x - 2017 = 0$ 的两个实根, 则 $2a^2 + b^2 + a$ 的值是 ()

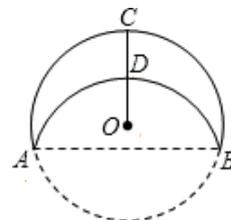
- A. 6052 B. 6050 C. 2017 D. 2018

6. 如图, 边长是 6 的正方形中有两个小正方形, 若两个小正方形的面积分别是 S_1 、 S_2 则 $S_1 + S_2$ 的值是 ()

- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19



第 6 题图



第 8 题图

7. 在直角坐标系中, 已知两点 $A(-8,3)$ 、 $B(-4,5)$, 直线 l 与 x 轴, y 轴直交于 $D(m,0)$ $C(0,n)$ 两点, 当四边形 $ABCD$ 的周长最小时, 比值 $\frac{n}{m}$ 的值是 ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. -2 C. $-\frac{2}{3}$ D. -3

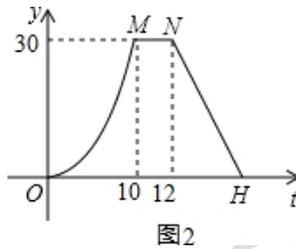
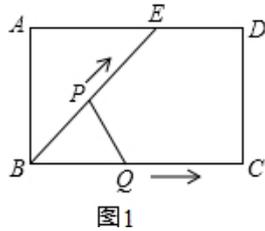
8. 如图, 将半径为 8 的 $\odot O$ 沿 AB 折叠, 弧 AB 恰好经过与 AB 垂直的半径 OC 中点 D , 则折痕 AB 的长为 ()

- A. $2\sqrt{15}$ B. $4\sqrt{15}$ C. 8 D. 10

9. 如图1, 点 E 为矩形 $ABCD$ 边 AD 上一点, 点 P 、 Q 同时从 B 点出发, 点 P 沿 $BE \rightarrow ED \rightarrow DC$ 运动到点 C 停止, 点 Q 沿 BC 运动到点 C 停止, 它们的速度都是 1cm/s , 设 P 、 Q 出发时间是 t 秒时, $\triangle BPQ$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$, 已知 y 与 t 的函数关系的图象如图2 (曲线 OM 是抛物线的一部分), 则下列结论:

- ① $AB = 6\text{cm}$; ② 直线 NH 的解析式是 $y = -5t + 90$; ③ $\triangle BPQ$ 可能与 $\triangle ABE$ 相似; ④ 当 $t = 13$ 秒时, $\angle PBQ = 30^\circ$, 其中正确的个数有 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



10. 定义符号 $\max\{1, -5\} = 1$, $\max\{-4, -3\} = -3$, 则 $\max\left\{-x^2 + 2x, \frac{1}{x}\right\}$ 的最小值是 ()

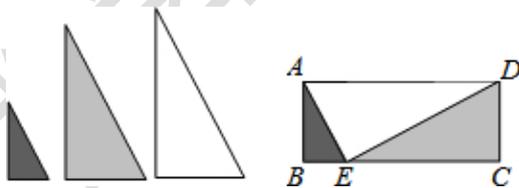
- A. 1 B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ C. $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

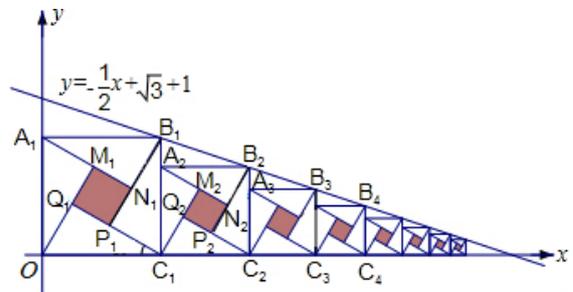
11. a 是 $m = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \sqrt{7} \times (\pi - \tan 60^\circ)^0 - 6\sqrt{3} \cos 30^\circ$ 的整数部分, b 是 m 的小数部分, 则 $(m+a)b =$ _____.

12. 已知 $a + \frac{1}{b} = \frac{2}{a} + 2b \neq 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值是 _____.

13. 如下图用形状相同, 大小不等的三个直角三角形木板, 恰好能拼出如图的矩形, $ABCD$, 若 $AE = 2$, $CE = 4BE$, 那么这个矩形的面积是 _____.



第 13 题图



第 14 题图

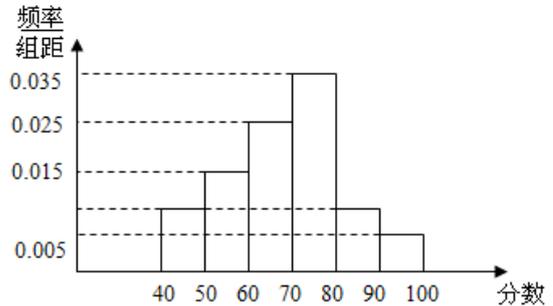
14. 如图, 2002 年在北京召开的世界数学大会会标图案是由四个全等的直角三角形围成的一个大正方形, 中间的阴影部分是一个小正方形的“赵爽弦图”, 若这四个全等的直角三角形有一个角是 30° , 原点 B_1 、 B_2 、 B_3 、 \dots 、 B_n 和 C_1 、 C_2 、 C_3 、 \dots 、 C_n 分别在直线 $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3} + 1$ 和 x 轴上, 则第 n 个阴影正方形的面积为 _____.

三、解答题 (共 60 分)

15、(本题 8 分) 如图从参加数学竞赛的学生中抽出 40 名, 将其成绩 (均为整数) 整理后画出频率分布如下, 观察图形, 回答下列问题:

(1) 80—90 这一组的频数、频率分别是多少? (4 分)

(2) 从成绩是 40—50 分和 90—100 分的学生中任意选两人, 若他们分别在不同分数段, 则组成学习互助小组, 求选出两人能组成学习互助小组的概率. (4 分)



16、(本题 8 分) 某工程, 若由甲、乙两队承包, 6 天完成, 厂家需付两队报酬共 8700 元; 若由乙、丙两队承包, 10 天完成, 厂家需付两队报酬共 9500 元, 若由甲、丙两队承包 5 天完成全部工程的 $\frac{2}{3}$, 厂家需付两队报酬共 5500 元.

(1) 求甲、乙、丙各队单独承包完成全部工程各需多少天? (4 分)

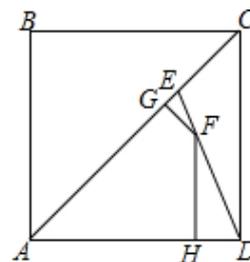
(2) 在保证 15 天内完成的前提下, 哪个队承包的费用最少? 最少的费用是多少? 说明理由. (4 分)

17、(本题 8 分) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 对角线 AC 上有一点 E , 使得 $AE = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$, 连结 DE , F 是 DE 上的一动点, 过 F 作 $FG \perp AC$ 于 G , 作 $FH \perp AD$ 于 H .

(1) 证明: $\triangle FGE \sim \triangle FHD$ (2 分)

(2) 设线段 FG 的长度是 x , FH 长度是 y , 求出 y 关于 x 的函数表达式, 并写出自变量的取值范围; (2 分)

(3) 连 GH , 求出 $\triangle GHF$ 面积的最大值. (4 分)



18、(本题 12 分) 抛物线 $y = x^2 + ax - 2$ 与 x 轴交于 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$

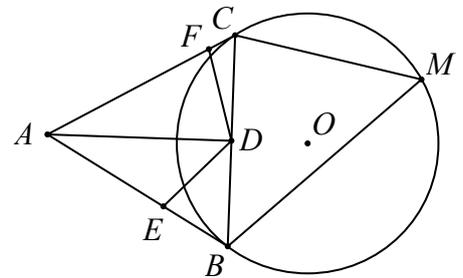
(1) 若 $\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} = 10$, 求 a 的值; (6 分)

(2) 若 $-1 \leq x \leq 2$, 用含 a 的函数式表示 y 的最小值, 并求出这些最小值的最大值. (6 分)

19、(本题 12 分) 如图, 已知 BC 是 $\odot O$ 的弦, A 是 $\odot O$ 外一点, 且 $\triangle ABC$ 是正三角形, 点 M 是 $\odot O$ 上一点, 并且 $\angle BMC = 60^\circ$

(1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线; (4 分)

(2) 若点 D 是 BC 的中点, E 、 F 分别是线段 AB 、 AC 上的两个动点, 且 A 、 E 、 D 、 F 四点共圆. $\odot O$ 的半径为 R , 求证: $BE + CF$ 是定值, 并求出这个定值. (8 分)



20、(本题 12 分) $|x - a|$ 的几何意义是表示数轴上对应 x 点到对应 a 的点的距离. 已知 $y_1 = |x - 1| + |x + 2|$.

$$y_2 = |x - 1| + |x + 2| + |x - 3|$$

(1) 分别求 y_1 、 y_2 的最小值. (4 分)

(2) 求 $y_3 = |x - 1| + |2x - 1| + |3x - 1| + \dots + |100x - 1|$ 的最小值. (8 分)