

2025 年湖南省中考数学试卷-参考答案

一.选择题 (共 10 小题)

1. 下列四个数中, 最大的数是 ( )

- A. 3.5                      B.  $\sqrt{2}$                       C. 0                      D. -1

【解析】 $\because 1 < \sqrt{2} < 2,$

$\therefore 3.5 > \sqrt{2} > 0 > -1,$

$\therefore$  选项中的四个数中最大的数是 3.5,

故选: A.

2. 武术是我国传统的体育项目. 下列武术动作图形中, 是轴对称图形的是 ( )



【解析】A. 不是轴对称图形, 故此选项不合题意;

B. 不是轴对称图形, 故此选项不合题意;

C. 是轴对称图形, 故此选项符合题意;

D. 不是轴对称图形, 故此选项不合题意;

故选: C.

3. 某校开展了五类社团活动: 舞蹈、篮球、口风琴、摄影、戏剧, 现从中随机抽取一类社团活动进行展示, 则抽中戏剧类社团活动的概率是 ( )

- A.  $\frac{2}{5}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{5}$

【解析】由题意知, 共有 5 种等可能的结果, 其中抽中戏剧类社团活动的结果有 1 种,

$\therefore$  抽中戏剧类社团活动的概率为  $\frac{1}{5}$ .

故选: D.

4. 计算  $a^3 \cdot a^4$  的结果是 ( )

- A.  $2a^7$                       B.  $a^7$                       C.  $2a^4$                       D.  $a^{12}$

【解析】 $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7.$

故选: B.

5. 将分式方程  $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$  去分母后得到的整式方程为 ( )

- A.  $x+1=2x$                       B.  $x+2=1$                       C.  $1=2x$                       D.  $x=2(x+1)$

【解析】原方程两边同乘  $x(x+1)$  得:  $x+1=2x,$

故选: A.

6. 在平面直角坐标系中, 将点  $P(-3,2)$  向右平移 3 个单位长度到  $P_1$  处, 则点  $P_1$  的坐标为 ( )

- A.  $(-6,2)$                       B.  $(0,2)$                       C.  $(-3,5)$                       D.  $(-3,-1)$

【解析】由题知,

将点  $P(-3,2)$  向右平移 3 个单位长度得到点  $P_1$  坐标为  $(0,2)$  .

故选:  $B$  .

7. 下列调查中, 适合采用全面调查的是 ( )

- A. 了解某班同学的跳远成绩
- B. 了解夏季冷饮市场上冰激凌的质量情况
- C. 了解全国中学生的身高状况
- D. 了解某批次汽车的抗撞击能力

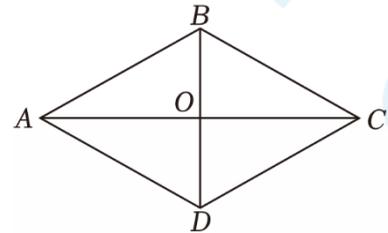
**【解析】**  $A$  . 了解某班同学的跳远成绩, 适合采用普查, 故本选项符合题意;  
 $B$  . 了解夏季冷饮市场上冰激凌的质量情况, 适合采用抽样调查, 故本选项不符合题意;  
 $C$  . 了解全国中学生的身高状况, 适合采用抽样调查, 故本选项不符合题意;  
 $D$  . 了解某批次汽车的抗撞击能力, 适合采用抽样调查, 故本选项不符合题意.

故选:  $A$  .

8. 如图, 在四边形  $ABCD$  中, 对角线  $AC$  与  $BD$  互相垂直平分,  $AB=3$ , 则四边形  $ABCD$  的周长为 ( )

- A. 6
- B. 9
- C. 12
- D. 18

**【解析】**  $\because$  对角线  $AC$  与  $BD$  互相垂直平分,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  为菱形,  
 $\because AB=3$ ,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  的周长为:  $3 \times 4 = 12$ ,  
 故选:  $C$  .



9. 对于反比例函数  $y = \frac{2}{x}$ , 下列结论正确的是 ( )

- A. 点  $(2,2)$  在该函数的图象上
- B. 该函数的图象分别位于第二、第四象限
- C. 当  $x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大
- D. 当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小

**【解析】**  $A$ 、把点  $(2,2)$  代入反比例函数  $y = \frac{2}{x}$ ,  $1 = 2$  不成立, 故不符合题意;  
 $B$ 、 $k = 2 > 0$ , 函数图象分别位于第一、三象限, 故不符合题意;  
 $C$ 、当  $x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 故不符合题意;  
 $D$ 、当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 故符合题意.

故选:  $D$  .

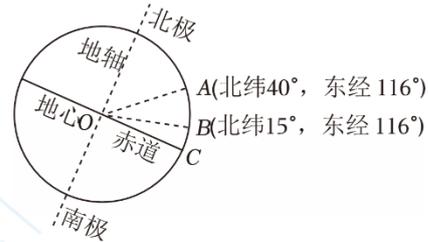
10. 如图, 北京市某处  $A$  位于北纬  $40^\circ$  (即  $\angle AOC = 40^\circ$ ), 东经  $116^\circ$ , 三沙市海域某处  $B$  位于北纬  $15^\circ$  (即  $\angle BOC = 15^\circ$ ), 东经  $116^\circ$ . 设地球的半径约为  $R$  千米, 则在东经  $116^\circ$  所在经线圈上的点  $A$  和点  $B$  之间的劣弧长约为 ( )

- A.  $\frac{5}{72} \pi R$  (千米)
- B.  $\frac{1}{12} \pi R$  (千米)
- C.  $\frac{5}{36} \pi R$  (千米)
- D.  $\frac{2}{9} \pi R$  (千米)

**【解析】**  $\because \angle AOC = 40^\circ$ ,  $\angle BOC = 15^\circ$ ,  
 $\therefore \angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = 40^\circ - 15^\circ = 25^\circ$ ,

$$\therefore AB = \frac{25}{360} \times 2\pi R = \frac{5}{36} \pi R \text{ (千米)}.$$

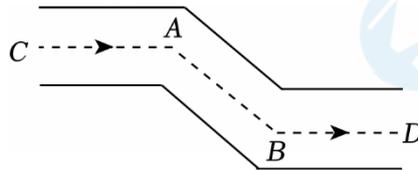
$\therefore$  点 A 和点 B 之间的劣弧长约为  $\frac{5}{36} \pi R$  千米.



故选: C.

二. 填空题 (共 8 小题)

11. 如图, 一条排水管连续两次转弯后又回到与原来相同的方向, 若第一次转弯时  $\angle CAB = 145^\circ$ , 则  $\angle ABD = 145^\circ$      .



**【解析】** 根据题意知,  $AC \parallel BD$ ,  $\angle CAB = 145^\circ$ ,

$$\therefore \angle ABD = \angle CAB = 145^\circ.$$

故答案为:  $145^\circ$ .

12. 化简  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

**【解析】**  $\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ,

故答案为:  $2\sqrt{3}$ .

13. 因式分解:  $a^2 + 13a = \underline{a(a+13)}$ .

**【解析】**  $a^2 + 13a = a(a+13)$ ,

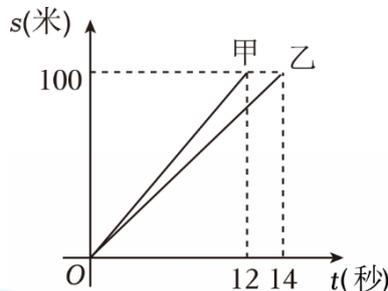
故答案为:  $a(a+13)$ .

14. 约分:  $\frac{x^3y}{xy} = \underline{x^2}$ .

**【解析】**  $\frac{x^3y}{xy} = \frac{xy \cdot x^2}{xy} = x^2$ ,

故答案为:  $x^2$ .

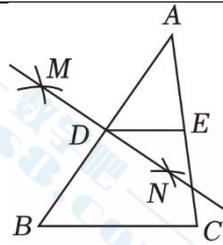
15. 甲、乙两人在一次 100 米赛跑比赛中, 路程  $s$  (米) 与时间  $t$  (秒) 的函数关系如图所示, 填 甲 (“甲” 或 “乙” 先到终点).



**【解析】** 由图象可知, 甲用了 12 秒, 乙用了 14 秒, 所以甲先到终点.

故答案为: 甲.

16. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = 6$ , 点  $E$  是  $AC$  的中点, 分别以点  $A$ ,  $B$  为圆心, 以大于  $\frac{1}{2}AB$  的长为半径画弧, 两弧相交于点  $M$ ,  $N$ , 直线  $MN$  交  $AB$  于点  $D$ , 连接  $DE$ , 则  $DE$  的长是 3.



**【解析】**由作图过程可知，直线  $MN$  为线段  $AB$  的垂直平分线，  
 $\therefore$  点  $D$  为  $AB$  的中点.  
 $\therefore$  点  $E$  是  $AC$  的中点，  
 $\therefore DE$  为  $\triangle ABC$  的中位线，  
 $\therefore DE = \frac{1}{2} BC = 3$ .

故答案为：3.

17. 如图，图 1 为传统建筑中的一种窗格，图 2 为其窗框的示意图，多边形  $ABCDEFGH$  为正八边形，连接  $AC$ ， $BD$ ， $AC$  与  $BD$  交于点  $M$ ， $\angle AMB = \underline{45^\circ}$  .

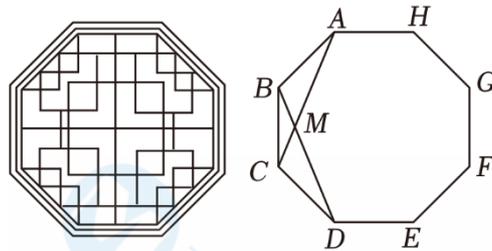


图1

图2

**【解析】**如图，设正八边形的外接圆的圆心为  $O$ ，

$\therefore$  八边形  $ABCDEFGH$  是正八边形，

$$\therefore \angle AOB = \angle COD = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle ACB + \angle CBD$$

$$= \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle COD$$

$$= 45^\circ.$$

故答案为： $45^\circ$  .

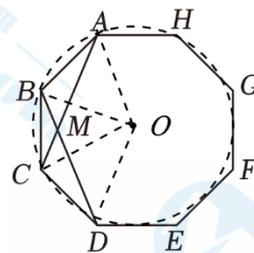


图2

18. 已知， $a$ ， $b$ ， $c$  是  $\triangle ABC$  的三条边长，记  $t = (\frac{a}{c})^k + (\frac{b}{c})^k$ ，其中  $k$  为整数.

(1) 若三角形为等边三角形，则  $t = \underline{2}$  ；

(2) 下列结论正确的是          . (写出所有正确的结论)

①若  $k=2$ ， $t=1$ ，则  $\triangle ABC$  为直角三角形；

②若  $k=1$ ， $a = \frac{1}{2}b + 2$ ， $c=1$ ，则  $5 < t < 11$ ；

③若  $k=1$ ， $t \leq \frac{5}{3}$ ， $a$ ， $b$ ， $c$  为三个连续整数，且  $a < b < c$ ，则满足条件的  $\triangle ABC$  的个数为 7.

**【解析】** (1) 由题可知  $t = 1^k + 1^k = 1 + 1 = 2$ ，

故答案为: 2;

(2) ①当  $k=2, t=1$  时,

$$\text{则 } 1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \text{ 即 } a^2 + b^2 = c^2,$$

$\therefore$  三角形为直角三角形,

故①正确, 符合题意;

②当  $k=1, a=\frac{1}{2}b+2, c=1$  时,

$$\text{则 } t = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a + b = \frac{1}{2}b + 2 + b = \frac{3}{2}b + 2,$$

1° 当  $a > b$  时,  $a - b < c$ , 即  $\frac{1}{2}b + 2 - b < 1$ ,

解得:  $b > 2$ ;

2° 当  $a < b$  时,  $b - a < c$ , 即  $b - \frac{1}{2}b - 2 < 1$ ,

解得:  $b < 6$ .

综上,  $2 < b < 6$ .

$$\text{当 } b=2 \text{ 时, } t = \frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5,$$

$$\text{当 } b=6 \text{ 时, } t = \frac{3}{2} \times 6 + 2 = 11;$$

$$\therefore 5 < t < 11,$$

故②正确, 符合题意;

$$\text{③ } t = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \leq \frac{5}{3},$$

$$\therefore a+b \leq \frac{5}{3}c,$$

又  $a+b > c$ ,

$$\therefore c < a+b \leq \frac{5}{3}c,$$

不妨设  $a=n$ , 则  $b=n+1, c=n+2$ ,

$$\therefore n+2 < 2n+1 \leq \frac{5}{3}(n+2),$$

解得:  $1 < n \leq 7$ ,

$\therefore n$  可取 2, 3, 4, 5, 6, 7,

对应的  $t$  值分别为:  $\frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{11}{7}, \frac{13}{8}, \frac{5}{3}$ , 共 6 个,

故③错误, 不符合题意.

故答案为: ①②.

### 三.解答题 (共 8 小题)

19. (6分) 计算:  $(-2025)^0 + |-1| - \tan 45^\circ$ .

【解析】原式=1+1-1

$$= 2 - 1$$

$$= 1.$$

20. (6分) 先化简, 再求值:  $(x+2)(x-2)+x(1-x)$ , 其中  $x=6$ .

【解析】 $(x+2)(x-2)+x(1-x)$

$$= x^2 - 4 + x - x^2$$

$$= x - 4,$$

当  $x=6$  时, 原式=6-4=2.

21. (8分) 如图,  $\triangle ABC$  的顶点  $A, C$  在  $\odot O$  上, 圆心  $O$  在边  $AB$  上,  $\angle ACB=120^\circ$ ,  $BC$  与  $\odot O$  相切于点  $C$ , 连接  $OC$ .

(1) 求  $\angle ACO$  的度数;

(2) 求证:  $AC=BC$ .

【解析】(1) 解:  $\because BC$  与  $\odot O$  相切于点  $C$ ,

$$\therefore OC \perp CB,$$

$$\therefore \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle ACB - \angle OCB = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ;$$

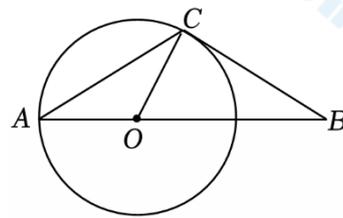
(2) 证明:  $\because OA=OC$ ,

$$\therefore \angle A = \angle ACO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle ACB = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

$$\therefore AC = BC.$$



22. (8分) 同学们准备在劳动课上制作艾草香包, 需购买  $A, B$  两种香料. 已知  $A$  种材料的单价比  $B$  种材料的单价多 3 元, 且购买 4 件  $A$  种材料与购买 6 件  $B$  种材料的费用相等.

(1) 求  $A$  种材料和  $B$  种材料的单价;

(2) 若需购买  $A$  种材料和  $B$  种材料共 50 件, 且总费用不超过 360 元, 则最多能购买  $A$  种材料多少件?

【解析】(1) 设  $A$  种材料的单价为  $x$  元, 则  $B$  种材料的单价为  $(x-3)$  元,

$$\text{由题意得: } 4x = 6(x-3),$$

$$\text{解得: } x = 9,$$

$$\therefore x - 3 = 6,$$

答:  $A$  种材料的单价为 9 元,  $B$  种材料的单价为 6 元;

(2) 设能购买  $A$  种材料  $m$  件, 则能购买  $B$  种材料  $(50-m)$  件,

$$\text{由题意得: } 9m + 6(50-m) \leq 360,$$

$$\text{解得: } m \leq 20,$$

答: 最多能购买  $A$  种材料 20 件.

23. (9分) 为了解某校七、八年级学生在某段时间内参加公益活动次数(单位: 次)的情况, 从这两个年级中各随机抽取 20 名学生进行调查. 已知这两个年级的学生人数均为 200 人.

对抽取的七年级学生在此段时间内参加公益活动次数的统计结果如下:

平均数	方差
-----	----

6.2	1.46
-----	------

同时对抽取的八年级学生的调查数据进行如下统计分析.

【收集数据】从八年级抽取的学生在此段时间内参加公益活动次数如下:

9 8 6 10 8 8 7 3 6 7

7 5 8 4 8 5 7 6 8 6

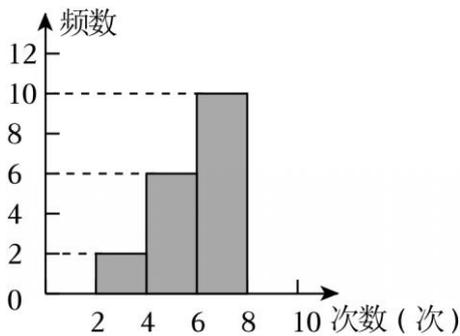
【整理数据】结果如表:

次数 $x$ 分组	画记	频数
$2 < x \leq 4$	T	2
$4 < x \leq 6$	正一	6
$6 < x \leq 8$	正正	10
$8 < x \leq 10$		

【分析数据】数据的平均数是 6.8, 方差是 2.76.

【解决问题】答下列问题:

- 请补全频数分布表和频数分布直方图;
- 请估计该校八年级学生在此段时间内参加公益活动次数超过 6 次的人数;
- 请从平均数、方差两个量中任选一个, 比较该校七、八年级学生在此段时间内参加公益活动次数的情况.

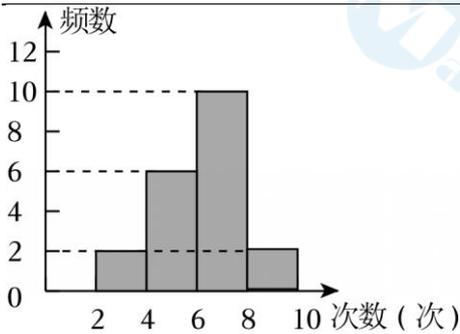


【解析】(1) 由题意得: “ $8 < x \leq 10$ ” 的频数为:  $20 - 2 - 6 - 10 = 2$ ,

补全频数分布表和频数分布直方图如下:

结果如表:

次数 $x$ 分组	画记	频数
$2 < x \leq 4$	T	2
$4 < x \leq 6$	正一	6
$6 < x \leq 8$	正正	10
$8 < x \leq 10$	T	2



(2)  $200 \times \frac{10+2}{20} = 120$  (人),

答: 估计该校八年级学生在此段时间内参加公益活动次数超过 6 次的人数为 120 人;

(3) 从平均数来看, 八年级生参加公益活动次数的平均数比七年级大, 所以八年级生参加公益活动比七年级积极. (答案不唯一).

24. (9分) 如图, 某处有一个晾衣装置, 固定立柱  $AB$  和  $CD$  分别垂直地面水平线  $l$  于点  $B, D$ ,  $AB = 19$  分米,  $CD > AB$ . 在点  $A, C$  之间的晾衣绳上有固定挂钩  $E$ ,  $AE = 13$  分米, 一件连衣裙  $MN$  挂在点  $E$  处 (点  $M$  与点  $E$  重合), 且直线  $MN \perp l$ .

(1) 如图 1, 当该连衣裙下端点  $N$  刚好接触到地面水平线  $l$  时, 点  $E$  到直线  $AB$  的距离  $EG$  等于 12 分米, 求该连衣裙  $MN$  的长度;

(2) 如图 2, 为避免该连衣裙接触到地面, 在另一端固定挂钩  $F$  处再挂一条长裤 (点  $F$  在点  $E$  的右侧), 若  $\angle BAE = 76.1^\circ$ , 求此时该连衣裙下端  $N$  点到地面水平线  $l$  的距离约为多少分米?

(结果保留整数, 参考数据:  $\sin 76.1^\circ \approx 0.97$ ,  $\cos 76.1^\circ \approx 0.24$ ,  $\tan 76.1^\circ \approx 4.04$ )

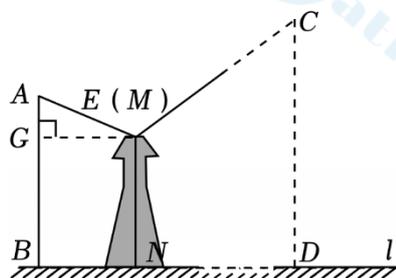


图1

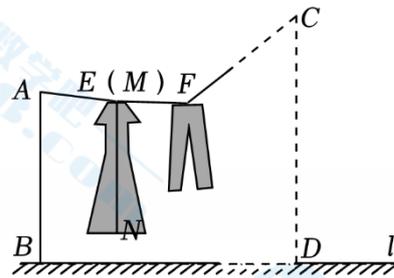


图2

【解析】(1)  $\because$  由题可知: 在  $Rt \triangle AGM$  中,  $AM = 13$  分米,  $MG = (12 \text{ 分})$  米,  $AG \perp GM$ ,

$\therefore AG = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$  分米,

$\because AB = (19 \text{ 分})$  米,

$\therefore BG = AB - AG = 19 - 5 = 14$  分米,

$\therefore MN = BG = 14$  分米,

$\therefore$  该连衣裙  $MN$  的长度为 14 分米;

(2) 如图 2, 过  $E$  作  $EK \perp AB$  于  $K$ ,

$\because$  在  $Rt \triangle AKE$  中,  $AE = 13$  分米,  $\angle BAE = 76.1^\circ$ ,  $AK \perp KE$ ,

$\therefore AK = AE \cdot \cos 76.1^\circ = 13 \times 0.24 = 3.12$  分米,

$\because AB = 19$  分米,

$\therefore BK = AB - AK = 19 - 3.12 = 15.88$  分米,

$\therefore BK - MN = 15.88 - 14 = 1.88 \approx 2$  分米,

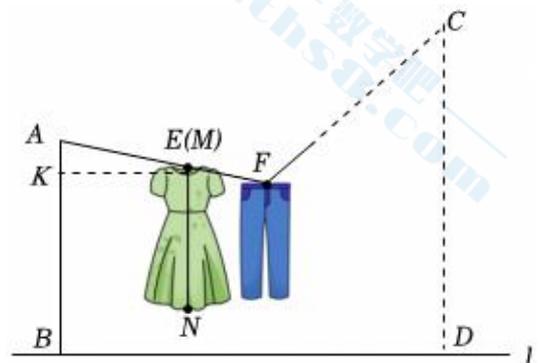


图2

∴该连衣裙下端  $N$  点到地面水平线  $l$  的距离约为 2 分米.

25. (10分) 【问题背景】

如图 1, 在平行四边形纸片  $ABCD$  中, 过点  $B$  作直线  $l \perp CD$  于点  $E$ , 沿直线  $l$  将纸片剪开, 得到  $\triangle B_1C_1E_1$  和四边形  $ABED$ , 如图 2 所示.

【动手操作】

现将三角形纸片  $B_1C_1E_1$  和四边形纸片  $ABED$  进行如下操作 (以下操作均能实现)

- ①将三角形纸片  $B_1C_1E_1$  置于四边形纸片  $ABED$  内部, 使得点  $B_1$  与点  $B$  重合, 点  $E_1$  在线段  $AB$  上, 延长  $BC_1$  交线段  $AD$  于点  $F$ , 如图 3 所示;
- ②连接  $CC_1$ , 过点  $C$  作直线  $CN \perp CD$  交射线  $E_1E$  于点  $N$ , 如图 4 所示;
- ③在边  $AB$  上取一点  $G$ , 分别连接  $BD$ ,  $DG$ ,  $FG$ , 如图 5 所示.

【问题解决】

请解决下列问题:

- (1) 如图 3, 填空:  $\angle A + \angle ABF = \underline{90}$  °;
- (2) 如图 4, 求证:  $\triangle CNM \cong \triangle C_1E_1M$ ;
- (3) 如图 5, 若  $AB = 2AD = 2\sqrt{7}AF$ ,  $\angle AGD = 60^\circ$ , 求证:  $FG \parallel BD$ .

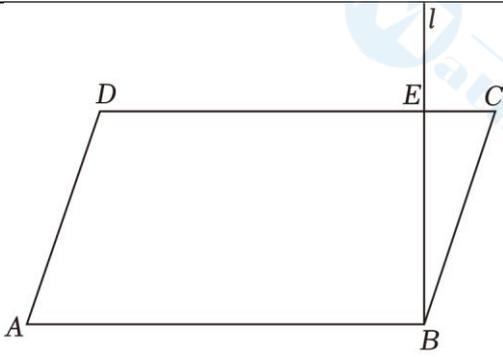


图1

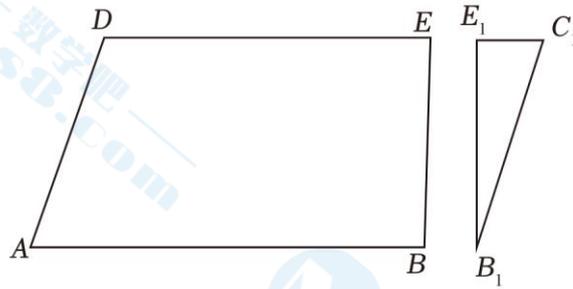


图2

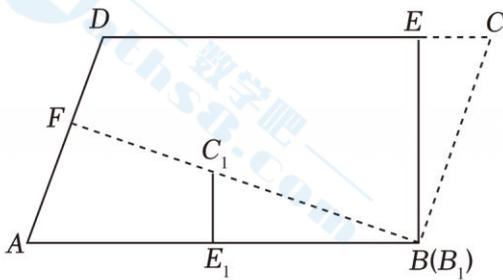


图3

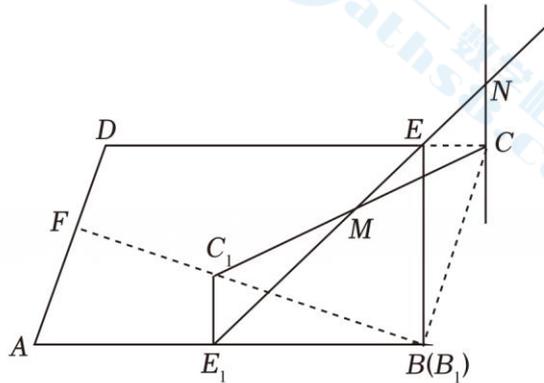


图4

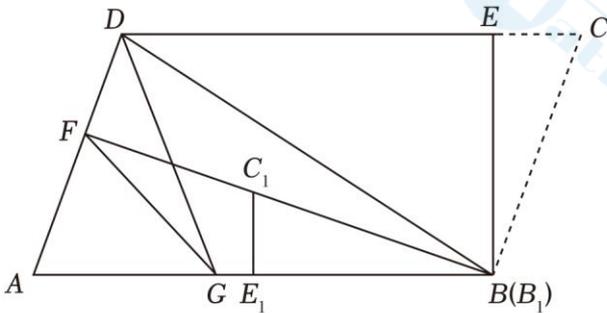


图5

【解析】(1) 解: 由题可知  $\angle ABF = \angle CBE$ ,

$\because BE \perp CD$ ,

$\therefore \angle CEB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle CBE + \angle C = 90^\circ$ ,

在平行四边形  $ABCD$  中,  $\angle A = \angle C$ ,

$\therefore \angle A + \angle ABF = 90^\circ$ ,

故答案为:  $90^\circ$ ;

(2) 证明:  $\because CN \perp CD$ ,

$\therefore \angle NCD = 90^\circ$ ,

由题可知  $\angle BE_1C_1 = \angle CEB = 90^\circ$ ,  $BE = B_1E_1$ ,  $CE = C_1E_1$ ,

$\therefore AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle EBE_1 = \angle CEB = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle EBE_1$  为等腰直角三角形,  
 $\therefore \angle BE_1E = \angle BEE_1 = 45^\circ$ ,  
 $\therefore \angle CEN = \angle CNE = \angle C_1E_1M = 45^\circ$ ,  
 $\therefore CN = CE = C_1E_1$ ,

在  $\triangle CNM$  和  $\triangle C_1E_1M$ ;

$$\begin{cases} \angle CMN = \angle C_1ME_1 \\ \angle CNE = \angle C_1E_1M \\ CN = C_1E_1 \end{cases}$$

$\therefore \triangle CNM \cong \triangle C_1E_1M (AAS)$ ;

(3) 证明: 如图, 过点  $D$  作  $DP \perp AB$  垂足为点  $P$ ,

由题  $AB = 2AD = 2\sqrt{7}AF$ ,

设  $AF = 1$ ,

$\therefore AD = \sqrt{7}$ ,  $AB = 2\sqrt{7}$ ,

$\therefore \cos A = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$ ,

在  $Rt \triangle ADP$  中,  $AP = AD \cdot \cos A = \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{14} = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

$\therefore \angle AGD = 60^\circ$ ,

$\therefore$  在  $Rt \triangle GDP$  中,  $PG = \frac{DP}{\tan \angle DGP} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$ ,

$\therefore AG = AP + PG = 2$ ,

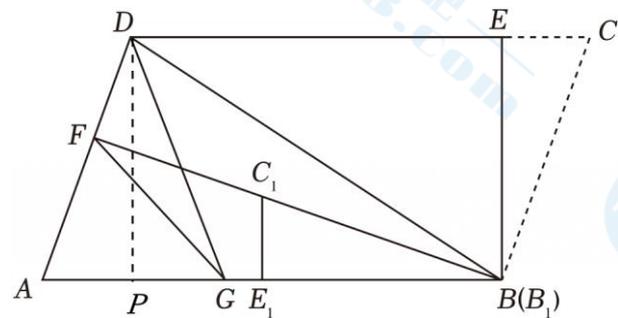
$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ , 即  $\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AB}$ ,

$\therefore \angle A = \angle A$ ,

$\therefore \triangle AFG \sim \triangle ADB$ ,

$\therefore \angle AFG = \angle ADB$ ,

$\therefore FG \parallel BD$ .



26. (10分) 如图, 已知二次函数  $y = ax(x-4) (a \neq 0)$  的图象过点  $A(2, 2)$ , 连接  $OA$ , 点  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,  $R(x_3, y_3)$  是此二次函数图象上的三个动点, 且  $0 < x_3 < x_1 < x_2 < 2$ , 过点  $P$  作  $PB \parallel y$  轴交线段  $OA$  于点  $B$ .

(1) 求此二次函数的表达式;

(2) 如图 1, 点  $C$ 、 $D$  在线段  $OA$  上, 且直线  $QC$ 、 $RD$  都平行于  $y$  轴, 请你从下列两个命题中选择一个进行解答:

① 当  $PB > QC$  时, 求证:  $x_1 + x_2 > 2$ ;

② 当  $PB > RD$  时, 求证:  $x_1 + x_3 < 2$ ;

(3) 如图, 若  $x_2 = \frac{3}{2}x_1, x_3 = \frac{1}{2}x_1$ , 延长  $PB$  交  $x$  轴于点  $T$ , 射线  $QT$ 、 $TR$  分别与  $y$  轴交于点  $Q_1, R_1$ , 连接  $AP$ , 分别在射线  $AT$ 、 $x$  轴上取点  $M$ 、 $N$  (点  $N$  在点  $T$  的右侧), 且  $\angle AMN = \angle PAO$ ,  $MN = 2\sqrt{2}$ . 记  $t = R_1Q_1 - ON$ , 试探究: 当  $x_1$  为何值时,  $t$  有最大值? 并求出  $t$  的最大值.

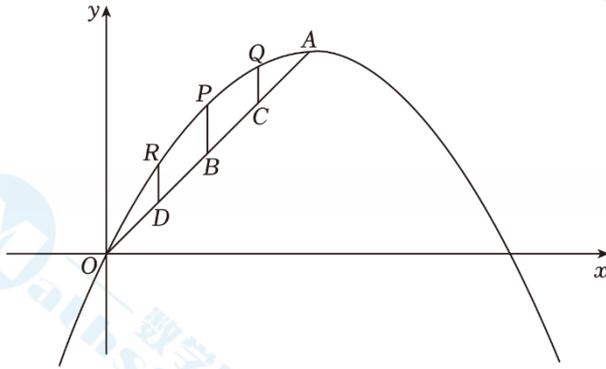


图1

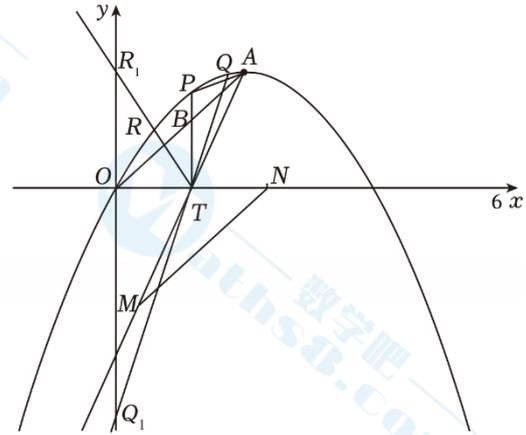


图2

**【解析】** (1) 把点  $A(2,2)$  代入二次函数  $y = ax(x-4)(a \neq 0)$  中,

得  $-4a = 2$ , 故  $a = -\frac{1}{2}$ ,

故此二次函数的表达式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ .

(2) 证明: 选择①: 由  $A(2,2)$  可知直线  $OA$  的表达式为  $y = x$ ,

由题意可知  $P(x_1, -\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1)$ ,  $B(x_1, x_1)$ ,  $Q(x_2, -\frac{1}{2}x_2^2 + 2x_2)$ ,  $C(x_2, x_2)$ ,

故  $PB = -\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1 - x_1 = -\frac{1}{2}x_1^2 + x_1$ ,  $QC = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_2$ ,

$\therefore PB > QC$ , 即  $-\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 > -\frac{1}{2}x_2^2 + x_2$ ,

整理可得  $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > x_2 - x_1$ , 由于  $x_2 - x_1 > 0$ ,

故  $\frac{1}{2}(x_2 + x_1) > 1$ ,

即  $x_1 + x_2 > 2$ ;

选择②: 同理得  $R(x_3, -\frac{1}{2}x_3^2 + 2x_3)$ ,  $D(x_3, x_3)$ ,

故  $RD = -\frac{1}{2}x_3^2 + x_3$ ,

$\therefore PB > RD$ , 即  $-\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 > -\frac{1}{2}x_3^2 + x_3$ ,

整理可得  $\frac{1}{2}(x_3 - x_1)(x_3 + x_1) > x_3 - x_1$ , 由于  $x_3 - x_1 < 0$ ,

故  $\frac{1}{2}(x_3 + x_1) < 1$ ,

即  $x_1 + x_3 < 2$ ;

(3) 由待定系数法可求得直线  $AP$  的表达式为  $y = (1 - \frac{1}{2}x_1)x + x_1$ ,

设直线  $AP$  交  $y$  轴于点  $G$ , 如图 2 所示,

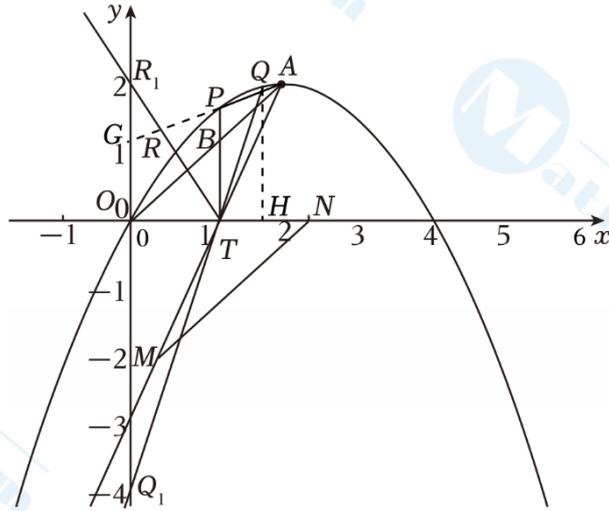


图2

则  $OG = x_1 = OT$ ,

$\therefore \angle GOA = \angle TOA = 45^\circ$ ,

在  $\triangle GOA$  和  $\triangle TOA$  中,

$$\begin{cases} OG = OT \\ \angle GOA = \angle TOA, \\ OA = OA \end{cases}$$

$\therefore \triangle GOA \cong \triangle TOA(SAS)$ ,

$\therefore \angle PAO = \angle TAO$ ,

$\therefore \angle AMN = \angle PAO$ ,

$\therefore \angle AMN = \angle TAO$ ,

$\therefore AO = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} = MN$ ,

在  $\triangle TOA$  和  $\triangle TNM$  中,

$$\begin{cases} \angle TMN = \angle TAO \\ \angle OTA = \angle NTM, \\ AO = MN \end{cases}$$

$\therefore \triangle TOA \cong \triangle TNM(AAS)$ ,

$\therefore TN = TO = x_1, \quad ON = 2x_1$ ,

作  $QH \perp x$  轴于点  $H$ ,

$$\text{则 } \tan \angle QTH = \frac{QH}{TH} = \frac{-\frac{1}{2}x_2^2 + 2x_2}{x_2 - x_1} = -\frac{9}{4}x_1 + 6,$$

$$\text{又 } \because \tan \angle QTH = \tan \angle Q_1TO,$$

$$\text{即 } \frac{OQ_1}{OT} = -\frac{9}{4}x_1 + 6,$$

$$\therefore OQ_1 = \left(-\frac{9}{4}x_1 + 6\right)x_1 = -\frac{9}{4}x_1^2 + 6x_1.$$

$$\therefore T(x_1, 0), R\left(\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{8}x_1^2 + x_1\right),$$

$$\therefore \text{由待定系数法可得直线 } RT \text{ 的表达式为 } y = \left(\frac{1}{4}x_1 - 2\right)x - \frac{1}{4}x_1^2 + 2x_1,$$

$$\text{即 } OR_1 = -\frac{1}{4}x_1^2 + 2x_1,$$

$$\therefore R_1Q_1 = OQ_1 + OR_1 = -\frac{5}{2}x_1^2 + 8x_1,$$

$$\therefore t = R_1Q_1 - ON = -\frac{5}{2}x_1^2 + 8x_1 - 2x_1 = -\frac{5}{2}x_1^2 + 6x_1 = -\frac{5}{2}\left(x_1 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{18}{5},$$

$$\text{故当 } x_1 = \frac{6}{5} \text{ 时, } t \text{ 的最大值为 } \frac{18}{5}.$$

$$\text{即当 } x = \frac{6}{5} \text{ 时, } t \text{ 的最大值为 } \frac{18}{5}.$$

关注“数学吧”公众号，更多资源共享！

